第 54 卷 第 5 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 54 No. 5
2015 年 9 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 2015

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.05.004

一类不连续广义 Lienard 微分系统的极限环分支*

李时敏
（广东财经大学数学与统计学院，广东 广州 510320）

摘 要： 利用不连续微分系统的一阶平均法，研究从一类广义 Lienard 微分系统中心的周期环域分支出极限环的最大个数问题。通过对该系统的中心进行分段连续的多项式扰动，得到了该系统从中心的周期环域分支出极限环最大个数的线性估计。结果表明：不连续 Lienard 微分系统比其对应的连续微分系统可以分支出更多的极限环。

关键词： 极限环；Lienard 微分系统；不连续微分系统；平均法

中图分类号： 0175 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529－6579（2015）05－0015－05

Bifurcation of Limit Cycles for a Class of Discontinuous Generalized Lienard Differential System

LI Shimin
(School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China)

Abstract: Using the first order averaging method for discontinuous differential system, the maximum number of limit cycles which bifurcate from the periodic annulus of the center for a class of generalized Lienard differential system is studied. By piecewise smooth polynomial perturbating, the linear estimation of the maximum number of limit cycles which bifurcate from the periodic annulus of this center is obtained. The result shows that there are more limit cycles which can bifurcate from the discontinuous Lienard differential system than the continuous one.

Key words: limit cycle; Lienard differential system; discontinuous differential system; averaging method

微分系统定性理论的一个主要问题是研究平面微分系统的极限环问题[1]。例如，众所周知的希尔伯特第 16 问题就是考虑平面多项式微分系统的极限环个数问题[2]。由于该问题十分困难，Smale[3]仅考虑平面 Lienard 微分系统，并将其列为 21 世纪需要解决的重要问题之一。Lienard 微分系统在科学以及工程的许多分支都有着广泛的应用[4]。

近年来，随着现实生活中出现许多不连续现象，越来越多的数学工作者开始研究不连续微分系统的分支问题[4]。鉴于不连续微分系统的重要性，本文讨论如下不连续广义 Lienard 微分系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - \varepsilon(f_n(x)y + \\ \qquad \operatorname{sign}(h_{2l}(x,y))g_m(x)) \end{cases} \tag{1}$$

其中

* **收稿日期：** 2015－03－21
基金项目： 国家自然科学基金青年科学基金资助项目（11401111）
作者简介： 李时敏（1983 年生），男；**研究方向：** 常微分方程及其应用；E-mail：lism1983@126.com

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g_m(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, h_0(x,y) = 1,$$
$$h_{2l}(x,y) = \prod_{k=0}^{l-1}\left(y - \tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x\right), l = 1,2,3,\cdots \tag{2}$$

令 $y - \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)x = x$，则 $h_{2l}(x,y) = 0$ 为 l 条过原点的直线，它们将整个平面等分成 $2l$ 个夹角为 π/l 的扇形区域。

记 $H(l,n,m)$ 为利用一阶平均法，不连续广义 Lienard 微分系统（1）从原点的周期环域分支出极限环的最大个数。目前已有许多文献对某些特殊情形进行了讨论，列举如下：

（i）若 $f_n(x) \equiv 0$，文［5］证明了 $H(0,0,m) = [(m-1)/2], H(1,0,m) = [m/2], H(2,0,m) = [(m-1)/2]$

并且猜测 $H(l,0,m) = [(m+1-l)/2], l = 3, 4, 5, \cdots$。其中［ ］表示取整函数。

（ii）若 $l = 0$，文［6］得到 $H(0,n,0) \geqslant [n/2]$。文［7］得到 $H(0,n,m) = [n/2]$。

（iii）若 $l = 1, m = 1$，文［8］中得到 $H(1,n,1) \geqslant [n/2] + 1$。

利用不连续微分系统的一阶平均法定理[9]，本文考虑了系统（1）从原点的周期环域分支出极限环的最大个数问题。我们的主要结果如下：

定理 1 当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小，考虑系统（1），

（i）若 l 为奇数，则 $H(l,n,m) \leqslant \max\{2[n/2]+1, 2[m/2]\}$。特别地，

$$H(1,n,m) \geqslant [n/2] + [m/2] + 1,$$
$$H(3,n,m) \geqslant [n/2] + [m/2]$$

（ii）若 l 为偶数，则 $H(l,n,m) \leqslant \max\{[n/2], [(m-1)/2]\}$。特别地，

$$H(2,n,m) = H(4,n,m) = \max\{[n/2], [(m-1)/2]\}$$

注 1 文献［7］中已经证明了 $H(0,n,n) = [n/2]$。由定理 1 的结论（i），我们可以得到 $H(1,n,n) = 2[n/2] + 1$。结果表明 不连续 Lienard 微分系统（1）（$l = 1$）比其相应的连续系统（$l = 0$）可以从原点的周期环域多分支出 $[n/2] + 1$ 个极限环。当然，我们的结论是建立在现有的结果之上。

1 不连续微分系统的一阶平均法

在这部分里，我们将介绍文［9］中的不连续微分系统的一阶平均法定理。值得注意的是，原文中考虑的是不连续微分方程组。由于本文只涉及单个微分方程，简单起见，我们仅介绍单个微分方程的一阶平均法。粗略地说：平均法给出了非自治微分系统与其相应的平均系统（自治微分系统）解之间的定性关系。有关平均法的一般介绍，可以参考文［10］。

考虑如下不连续微分方程

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(\theta,r) + \varepsilon^2 R(\theta,r,\varepsilon) \tag{3}$$

其中

$$F(\theta,r) = F_1(\theta,r) + \mathrm{sign}(h(\theta,r))F_2(\theta,r),$$
$$G(\theta,r,\varepsilon) = G_1(\theta,r,\varepsilon) + \mathrm{sign}(h(\theta,r))G_2(\theta,r,\varepsilon) \tag{4}$$

且 $F_1, F_2: \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}, G_1, G_2: \mathbf{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbf{R}, h: \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}$ 均为连续函数。$D \subset \mathbf{R}$ 为开区间。这些函数均关于变量 θ 为 2π 的周期函数。$\mathrm{sign}(u)$ 为符号函数，定义如下：

$$\mathrm{sign}(u) = \begin{cases} 1, 若\ u > 0, \\ 0, 若\ u = 0, \\ -1, 若\ u < 0 \end{cases}$$

此外，假设 $h \in C^1$，并以 0 为正则值。记 $M = h^{-1}(0), \Sigma = \{0\} \times D \not\subset M, \Sigma_0 = \Sigma \setminus M \neq \phi$，$\Sigma_0$ 中的元素 $z \underline{\Delta} (0,z) \notin M$。

定理 2 考虑微分方程（3），定义平均函数 $f: D \to \mathbf{R}$ 如下

$$f(r) = \int_0^{2\pi} F(\theta,r)\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

假设满足以下三个条件：

（i）F_1, F_2, R_1, R_2 和 h 均关于 r 满足局部李普希兹条件。

（ii）存在 $a \in \sum_0$，使得 $f(a) = 0$。且存在 a 的某去心领域 V，使得对所有的 $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$，都有 $f(z) \neq 0$ 和 Brouwer 度 $d_B(f,V,0) \neq 0$ 成立。有关 Brouwer 度的定义见文［11］中的附录 A。

（iii）若 $\partial h/\partial\theta \neq 0$，则对所有的 $(\theta,r) \in M$，有 $\partial h/\partial\theta \neq 0$；若 $\partial h/\partial\theta \equiv 0$，则对所有的

$(\theta,z) \in [0,2\pi] \times M$ 有 $\langle \nabla_r h, F_1\rangle^2 - \langle \nabla_r h, F_2\rangle^2 > 0$，其中 $\nabla_r h$ 表示函数 h 关于变量 r 的梯度。则当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小，系统（3）存在一个周期为 2π 的解 $r(\theta,\varepsilon)$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，$r(0,\varepsilon) \to a$（在 Hausdorff 度量意义下）。

为了方便验证定理 2 的假设（ii），我们给出下面的注记。

注 2[11] 假设 $f: D \to \mathbf{R}$ 是 C^1 函数，$a \in D$。若 $J_f(a) \neq 0$，且存在 a 的邻域 V，对所有的 $r \in \bar{V} \setminus \{a\}$，有 $f(r) \neq 0$. 则 $d_B(f,V,0) \neq 0$。

由定理 2 和注 2 可知，若微分系统（3）满足定理 2 中的假设（i）和（iii），则由式（5）定义的平均函数 $f(r)$ 的简单零点个数对应微分系统（3）的极限环个数。下面我们开始推导平均函数（5）的具体表达式。

2　平均函数

作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \theta \in (0, 2\pi)$。当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小，将 θ 作为新的自变量。我们可将微分系统（1）转换成如下的等价微分方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon F(\theta, r) + O(\varepsilon^2) \tag{6}$$

其中

$$F(\theta, r) = \sin\theta(f_n(r\cos\theta) r\sin\theta + \mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta)) g_m(r\cos\theta)) \tag{7}$$

将式（7）代入式（5），得到平均函数

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_0^{2\pi} F(\theta,r)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} r\sin^2\theta f_n(\theta,r)\mathrm{d}\theta + \\ &\int_0^{2\pi}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta))\sin\theta g_m(r\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \\ &\sum_{i=0}^{n} r^{i+1} a_i \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^i\theta\mathrm{d}\theta + \\ &\sum_{j=0}^{m} r^j b_j \int_0^{2\pi}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta = \\ &\sum_{i=0}^{n} A_i r^{i+1} + \sum_{j=0}^{m} B_j r^j \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} A_i &= a_i\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^i\theta\mathrm{d}\theta, \\ B_j &= b_j\int_0^{2\pi}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{9}$$

由于

$$\begin{aligned} A_i &= a_i\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^i\theta\mathrm{d}\theta = \\ &a_i\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\mathrm{d}\theta - a_i\int_0^{2\pi}\cos^{i+2}\theta\mathrm{d}\theta = \\ &a_i\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\mathrm{d}\theta - a_i\int_0^{2\pi}\cos^{i+1}\theta\mathrm{d}\sin\theta = \\ &a_i\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\mathrm{d}\theta - \frac{1}{i+1}A_i \end{aligned} \tag{10}$$

由式（10）可得：$A_i = \frac{i+1}{i+2}a_i\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\mathrm{d}\theta$。显然 $A_{2i+1} = 0, i = 0,1,2,\cdots$。平均函数（8）可以表示为：

$$f(r) = \sum_{i=0}^{[n/2]} A_{2i} r^{2i+1} + \sum_{j=0}^{m} B_j r^j \tag{11}$$

根据定理 2，需要计算平均函数（11）简单零点的个数。我们分以下两种情况来讨论：

2.1　l 为奇数

命题 1　若 l 为奇数，则平均函数（11）为

$$f(r) = \sum_{i=0}^{[n/2]} A_{2i} r^{2i+1} + \sum_{j=0}^{[m/2]} B_{2j} r^{2j} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{2i} &= \frac{2i+1}{2i+2}a_{2i}\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\theta\mathrm{d}\theta, \\ B_{2j} &= \frac{(-1)^{(l-1)/2}8b_{2j}}{2j+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{(l-1)/2}(-1)^k\cos^{2j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right) \end{aligned} \tag{13}$$

证明　若 $\theta \in (0, \pi/l)$，则

$$y - \tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x > 0, k = 0, \frac{l+1}{2}, \frac{l+3}{2}, \cdots, l-1,$$

$$y - \tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x < 0, k = 1, 2, \cdots, \frac{l-1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta)) = \\ &\mathrm{sign}\left(\prod_{k=0}^{l-1}(y - \tan(\frac{k\pi}{l})x)\right) = \\ &(-1)^{(l-1)/2}, \theta \in (0, \pi/l) \end{aligned}$$

类似地，当 $\theta \in (k\pi/l, (k+1)\pi/l)$ 时，

$$\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta)) = (-1)^{(l-1)/2+k}, \quad k = 1, 2, \cdots, l-1 \tag{14}$$

将式（14）代入式（9）中第二式，有

$$\begin{aligned} B_j &= b_j\int_0^{2\pi}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta = \\ &b_j\sum_{k=0}^{2l-1}\int_{k\pi/l}^{(k+1)\pi/l}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta, r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta = \\ &b_j\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^{(l-1)/2+k}\int_{k\pi/l}^{(k+1)\pi/l}\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta = \\ &b_j\frac{(-1)^{(l+1)/2}}{j+1}\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^k \cdot \\ &\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right) - \cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right) = \\ &b_j\frac{(-1)^{(l+1)/2}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k \cdot \\ &\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right) - \cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right) + \\ &b_j\frac{(-1)^{(l+1)/2}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{k+l} \cdot \\ &\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+l+1)\pi}{l}\right) - \cos^{j+1}\left(\frac{(k+l)\pi}{l}\right)\right) = \\ &b_j\frac{(-1)^{(l+1)/2}}{j+1}(1 + (-1)^j)\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k \cdot \\ &\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right) - \cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

显然 $B_{2j+1} = 0$。由式（15）可得

$$B_{2j}=\frac{2b_{2j}(-1)^{(l+1)/2}}{2j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cdot$$
$$\left(\cos^{2j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right)-\cos^{2j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)=$$
$$\frac{4b_{2j}(-1)^{(l-1)/2}}{2j+1}\left(1+\sum_{k=1}^{l-1}(-1)^k\cos^{2j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)=$$
$$\frac{8b_{2j}(-1)^{(l-1)/2}}{2j+1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{(l-1)/2}(-1)^k\cos^{2j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)$$

注意到当 $l=1$，则 $B_{2j}=\frac{4b_{2j}}{2j+1}$。证毕。

2.2 l 为偶数

命题 2 若 l 为偶数，则平均函数（11）为

$$f(r)=\sum_{i=0}^{[n/2]}A_{2i}r^{2i+1}+\sum_{j=0}^{[(m-1)/2]}B_{2j+1}r^{2j+1}\quad(16)$$

其中

$$A_{2i}=\frac{2i+1}{2i+2}a_{2i}\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$B_{2j+1}=\frac{(-1)^{l/2}2b_{2j+1}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cos^{2j+2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\quad(17)$$

证明 若 $\theta\in(0,\pi/l)$，则

$$y-\tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x>0,k=0,\frac{l}{2},\frac{l+2}{2},\cdots,l-1,$$
$$y-\tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x<0,k=1,2,\cdots,\frac{l-2}{2}$$

因此

$$\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta,r\sin\theta))=\mathrm{sign}\left(\prod_{k=0}^{l-1}\left(y-\tan\left(\frac{k\pi}{l}\right)x\right)\right)=$$
$$(-1)^{l/2-1},\theta\in(0,\pi/l)$$

类似可得：当 $\theta\in(k\pi/l,(k+1)\pi/l)$ 时，

$$\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta,r\sin\theta))=$$
$$(-1)^{l/2+k-1},k=1,2,\cdots,l-1\quad(18)$$

将式（18）代入式（9）中第二式，有

$$B_j=b_j\int_0^{2\pi}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta,r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta=$$
$$b_j\sum_{k=0}^{2l-1}\int_{k\pi/l}^{(k+1)\pi/l}\mathrm{sign}(h_{2l}(r\cos\theta,r\sin\theta))\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta=$$
$$b_j\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^{l/2+k-1}\int_{k\pi/l}^{(k+1)\pi/l}\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta=$$
$$b_j\frac{(-1)^{l/2}}{j+1}\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^k\cdot$$
$$\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right)-\cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)=$$
$$b_j\frac{(-1)^{l/2+1}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cdot$$
$$\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right)-\cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)+$$
$$b_j\frac{(-1)^{l/2+1}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{k+l+j+1}\cdot$$
$$\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+l+1)\pi}{l}\right)-\cos^{j+1}\left(\frac{(k+l)\pi}{l}\right)\right)=$$
$$b_j\frac{(-1)^{l/2+1}}{j+1}(1+(-1)^{j+1})\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cdot$$
$$\left(\cos^{j+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right)-\cos^{j+1}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)\quad(19)$$

显然 $B_{2j}=0$。由式（19）可得

$$B_{2j+1}=\frac{(-1)^{l/2+1}b_{2j+1}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cdot$$
$$\left(\cos^{2j+2}\left(\frac{(k+1)\pi}{l}\right)-\cos^{2j+2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\right)=$$
$$\frac{(-1)^{l/2}2b_{2j+1}}{j+1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\cos^{2j+2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)$$

注意到：若 $l=0$，则 $h_0(x,y)=1$，从而 $B_j=b_j\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^j\theta\mathrm{d}\theta\equiv0$。证毕。

3 定理 1 的证明

在估计平均函数零点个数的过程中，我们需要用到如下引理：

引理 1[12] 考虑 $p+1$ 个线性无关的解析函数 $f_i:U\to\mathbf{R},i=0,1,\cdots,p+1$，其中 $U\in\mathbf{R}$ 为开区间。假设存在某些 $j\in\{0,1,\cdots,p\}$，使得 f_j 恒正或恒负，则必定存在 $p+1$ 个常数 $c_i,i=0,1,\cdots,p$，使得 $f(r)=\sum_{i=0}^{p}c_if_i(r)$ 在区间 U 上至少有 p 个简单零点。

定理 1 的证明 首先考虑情形（i）。

由命题 1 可知：平均函数（12）是关于 r 的最高次数为 $\max\{2[n/2]+1,2[m/2]\}$ 的多项式。因此，$H(l,m,n)\leqslant\max\{2[n/2]+1,2[m/2]\}$。

当 $l=1$ 时，$B_{2j}=\frac{4b_{2j}}{2j+1}$。由式（12）可知，平均函数 $f(r)$ 是 $[n/2]+[m/2]+2$ 个线性无关的解析函数的线性组合。由于 a_i,b_j 相互独立，系数 A_{2i+1},B_{2j} 可以任意选取。根据引理 1，有 $H(1,n,m)\geqslant[n/2]+[m/2]+1$。

当 $l=3$ 时，由式（13）可得：$B_{2j}=\frac{-8b_{2j}}{2j+1}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2j+1}\right)$。由式（12）和 $B_0=0$ 可知，平均函数 $f(r)$ 是 $[n/2]+[m/2]+1$ 个线性无关的解析函数的线性组合，且其系数 A_{2i+1},B_{2j} 可以任意选取。根据引理 1，有 $H(3,n,m)\geqslant[n/2]+[m/2]$。

情形（ii）同理可证。

（下转第 27 页）

［4］ GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling［J］. The Electronic Joumal of Combinatorics, 2013, 19, DS6: 1 –306.

［5］ ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters［J］. Ars Combinatorial, 2012, 103: 13 –18.

［6］ KATHIESAN K M. Two classes of graceful graphs［J］. Ars Combinatorial, 2000, 22: 491 –504.

［7］ 孙彩云,王涛. 非连通图($K_1 \vee (P_n^1 \cup P_n^2)) \cup P_n^3$ 及($K_1 \vee (P_n^1 \cup P_n^2)) \cup St(n)$的优美性［J］. 中山大学学报：自然科学版, 2014, 53(3): 52 –56.

［8］ 孙宗剑,黎贞崇,罗海鹏,等. 升降梯图 L_{3m+n+1} 的优美性［J］. 计算机应用研究, 2007, 24(12): 132 –133.

［9］ 容青, 熊冬春. $P_{2r,b}$ 图的优美性［J］. 系统科学与数学, 2010, 30(5): 703 –709 .

［10］ 唐保祥,任韩. 2 类优美图［J］. 山东大学学报:理学版, 2010, 45(10): 45 –48 .

［11］ 唐保祥,任韩. 3 类特殊图的优美性［J］. 武汉大学学报:理学版, 2014, 60(6): 553 –556 .

(上接第 18 页)

参考文献:

［1］ 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论［M］. 北京:科学出版社,1985.

［2］ LI J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields［J］. Int J Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 47 –106.

［3］ SMALE S. Mathematical problems for the next century［J］. The Mathematical Intelligence, 1998, 20: 7 –15.

［4］ BERNARDO M, BUDD C, CHAMPNEYS A, et al. Bifurcations in nonsmooth dynamic systems［J］. SIAM Review, 2008, 50: 629 –701.

［5］ LLIBRE J, TEIXEIRA M. Limit cycles for m-piecewise discontinuous polynomial Lienard differential equations［J］. Z Angew Math Phys, 2015, 66(1): 51 –66.

［6］ BLOWS T, LLOYD N. The number of small-amplitude limit cycles of Lienard equations［J］. Math Proc Camb Phil Soc, 1984, 95: 359 –366.

［7］ LLIBRE J, MEREU A, TEIXEIRA M. Limit cycles for the generalized polynomial Lienard differential equations［J］. Math Proc Camb Phil Soc, 2010, 148: 363 –383.

［8］ MIRANDA M, MEREU A. Limit cycles in discontinuous classical Lienard equations［J］. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 20: 67 –73.

［9］ LLIBRE J, NOVAES D, TEIXEIRA M. On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems［J］. Bull Sci Math, 2015, 139: 229 –244.

［10］ SANDERS J, VERHULST F. Averaging methods in nonlinear dynamic systems［M］. New York: Springer-Verlag, 1985.

［11］ BUICA A, LLIBRE J. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree［J］. Bull Sci Math, 2004, 128: 7 –22.

［12］ COLL B, GASULL A, PROHENS R. Bifurcation of limit cycles from two families of centers［J］. Dyn Contin Diccrete Impulse Syst, Ser A, Math Anal, 2005, 12: 275 –287.